

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 466

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КММ Ответ: -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

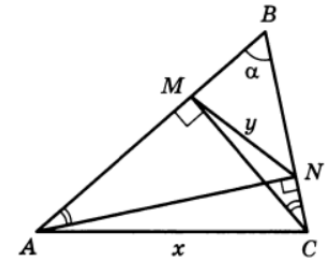
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

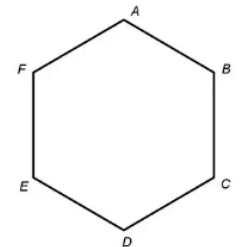
Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. В треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AN и CM соответственно на стороны BC и AB. Периметры треугольников ABC и BMN равны соответственно 15 и 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BMN равен 1,8. Найдите длину стороны AC.



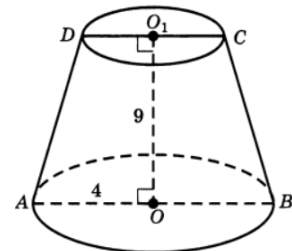
Ответ: _____.

2. Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна 15. Найдите скалярное произведение векторов \vec{AB} и \vec{CD} .



Ответ: _____.

3. Высота усеченного конуса равна 9, радиус нижнего основания – 4. Площадь сечения ABCD равна 54. Найдите V – объем усеченного конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



Ответ: _____.

4. Старая графиня гуляет по парку. Она начинает маршрут от входа и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом она выйдет к фонтану. Ответ округлите до сотых.



Ответ: _____.

5. Старая графиня вытащила из колоды карт (52 шт.) три карты. Оказалось, что эти карты – тройка, семерка и туз. Какова вероятность того, что все вытасенные карты разных мастей?



Ответ: _____.

6. Решите уравнение: $\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$

Ответ: _____.

7. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4} : \sqrt{x^5}} \cdot (x^2 : \sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{4}}$ при $x = 21$.

Ответ: _____.

8. Найдите абсциссу точки пересечения с осью абсцисс касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку $(0;10)$, если $f'(0) = -2$.

Ответ: _____.

9. Кинетическая энергия тела, имеющего массу m (кг) и скорость v (м/с), равна

$$E = \frac{mv^2}{2} \quad (\text{Дж}).$$

Какую наибольшую скорость (в м/с) может иметь пуля массой 8 грамм, если при прохождении через неподвижную мишень с передачей ей энергии 1470 Дж, скорость пули уменьшается не менее, чем в два раза? (Считайте, что потерей энергии в процессе полёта пули можно пренебречь).

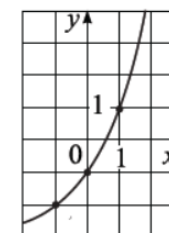


Ответ: _____.

10. Две частицы движутся между точками А и В (по прямой) туда и обратно. Первая выходит из А и движется со скоростью 4 м/с, вторая выходит из А одновременно с первой и движется со скоростью 9 м/с. Известно, что вторично обе частицы оказались на одинаковом расстоянии от А через 4 с после того, как это произошло в первый раз. Найдите расстояние АВ в метрах.

Ответ: _____.

11. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^{x+b} + c$. Найдите значение $f(4)$.



Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (\sqrt{5x-7} + 10) \cdot (x^2 + 4x - 6)$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} + \sin\left(\pi + \frac{x}{2}\right)\cos\frac{9x}{2} = \sin^2 4x$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ через точки B_1 и D_1 проходят плоскости α и β , каждая из которых делит диагональ AC_1 на части, относящиеся друг

к другу как 1 : 3. $AB = 4$, $BC = 3$, высота параллелепипеда равна $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

А) Докажите, что плоскости α и β перпендикулярны

Б) Найдите отношение объемов частей, на которые плоскости α и β делят параллелепипед $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$.

15. Решите неравенство: $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) \leq 4$

16. В июле планируется взять кредит в банке на 12 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту в 2 раза больше наименьшего платежа.

17. В окружность вписана трапеция, основание AD которой является диаметром, а угол BAD равен 60° . Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P так, что $AP : PD = 1 : 3$.

А) Докажите, что CP делит трапецию на две равновеликие части.

Б) Найдите площадь треугольника BPE , если радиус окружности равен $2\sqrt{7}$.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20 \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

19. Натуральное число $n > 1$ называется свободным от квадратов, если оно не делится ни на один квадрат натурального числа, кроме 1.

Составим две последовательности натуральных чисел: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где a_n - наибольший делитель числа n , являющийся точным квадратом натурального числа, b_n - наибольший свободный от квадратов делитель числа n . Обозначим через $t(n)$ количество делителей числа n .

А) Может ли выполняться равенство $t(n) = t(a_n) + t(b_n)$?

Б) Сколько натуральных чисел $n \leq 100$ удовлетворяют равенству $t(n) = t(a_n) + 1$?

В) Какие натуральные числа удовлетворяют равенству $a_n \cdot b_n = n$? Какое наибольшее натуральное число $n \leq 1000$ удовлетворяет неравенству $a_n \cdot b_n > n$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.