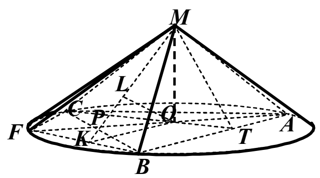
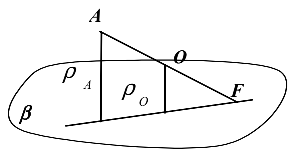
C4 Дан конус с вершиной *M*, радиус основания которого равен $2\sqrt{21}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, CMB, AMC равны α каждый, причем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3}{5}}$. Точка *F* выбрана на дуге *BC* окружности основания конуса, не содержащей точки *A*, так, что объем пирамиды *MABFC* наибольший. Найдите расстояние от точки *A* до плоскости *MBF*.

<u>Ответ</u>:
12.
//Решение:



1) $MA=MB=MC$, как образующие конуса и $\angle AMB=\angle AMC=\angle CMB=\alpha$, следовательно, треугольники AMB, AMC, CMB равны. Поэтому $AB=AC=CB$, значит, треугольник ABC – равносторонний и вписан в окружность радиуса $r=2\sqrt{21}$. Следовательно, $AB=AC=CB=r\sqrt{3}=6\sqrt{7}$.

2) Объем V пирамиды $MABFC$ вычисляется по формуле $V=\frac{MO}{3}\left(S_{ABC}+S_{BCF}\right)$, где S_{ABC}, S_{BCF} – площади треугольников *ABC* и *BCF, MO* – высота конуса и пирамиды $MABFC$. Поскольку величины *MO, BC* и S_{ABC} в условии задачи постоянны, то $V\le\frac{MO}{3}\left(S_{ABC}+\frac{BC}{2}\cdot h_F\right)$, где h_F – наибольшая величина расстояния от точки дуги *BC*, не содержащей точку *A,* до стороны *BC* треугольника *ABC*. Расстояние от точки *F* дуги окружности до стягивающей ее хорды наибольшее, если *F* – середина этой дуги. Итак, основанием пирамиды $MABFC$, удовлетворяющей условиям задачи, является четырехугольник, в котором вершины *A, B, C* делят окружность основания конуса на три равные части и вершина *F* – середина дуги *BC.*



3) Пусть ρ_A и ρ_O – расстояния от точек *A* и *O* до плоскости β=(MBF) соответственно. Тогда $\rho_A:\rho_O=AF:OA=2:1$, следовательно, $\rho_A=2\rho_O$.

4) FA – диаметр основания конуса. Следовательно, $\angle ABF=90°$. Пусть *K* – середина *FB*. Тогда *OK* – средняя линия треугольника *ABF* и поэтому $FB\perp OK$, $OK=0{,}5AB$. Прямая *FB* перпендикулярна *MK* и *MO*, следовательно, $MBF\perp MOK$. Пусть *OL* – высота треугольника MOK. По свойству перпендикулярных плоскостей $OL\perp MBF$. Следовательно, $OL=\rho_O$. Пусть *CT* – высота ΔABC. Так как $AB=6\sqrt{7}$, то $OK=3\sqrt{7}$,

$MT=\dfrac{AB}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{105}$ и $OM=\sqrt{MT^2-OT^2}=2\sqrt{21}$. Тогда

$\rho_O=\dfrac{OK\cdot OM}{\sqrt{OK^2+OM^2}}=6$. Следовательно, искомое расстояние $\rho_A=12$.

Ответ: 12.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) установлено, что треугольник ABC – равносторонний; 2) установлено, что пирамида $MABFC$ удовлетворяет условию задачи, только если вершина F – середина дуги BC; 3) найдено соотношение между расстояниями от точки A и от точки O до плоскости MBF; 4) вычислены расстояние от точки O до плоскости MBF и искомое расстояние от точки A до плоскости MBF. Обоснованы ключевые моменты решения: а) расположение вершин основания $ABFC$ пирамиды $MABFC$, имеющей наибольший объем; б) высота OL треугольника MOK – расстояние от точки O до плоскости MBF. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) – 4). Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения[1]. Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях[2], но не грубые ошибки. Допустимы одна описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.
2	Приведены шаги решения 1), 2) и найдено расстояние от точки O до плоскости MBF или, может быть, от какой-либо другой точки, например от точки C. Допустимо отсутствие утверждений, составляющих ключевые моменты а) и б) решения. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы описки и/или негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: имеются шаги 1) и 2) решения, которые описаны словесно или ясно отражены и видны на чертеже (в соответствующих треугольниках обозначены равные углы и равные стороны). Вычислена длина стороны основания пирамиды. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.

[1] Подробнее об утверждениях, составляющих ключевые моменты решения задания С4, см. во введении к «Рекомендациям по оценке выполнения заданий с развернутым ответом (С1–С5)».
[2] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение или на признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.