C1 Найдите промежутки убывания функции $f(x)=\dfrac{\left(x^2-8x\right)\left(x^2-16x+64\right)}{3x-24}$.

__Решение:__

1) $f(x)=\dfrac{\left(x^2-8x\right)\left(x^2-16x+64\right)}{3x-24}$, то есть $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^3-16x^2+64x\right)$ при $x\neq 8$.

2) $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(3x^2-32x+64\right)=\dfrac{1}{3}(3x-8)(x-8)=\left(x-\dfrac{8}{3}\right)(x-8)$ при $x\neq 8$.

$f'(x)=0$ при $x=\dfrac{8}{3}$.

Функция $y=f(x)$ убывает на промежутке $\left[\dfrac{8}{3};\ 8\right)$.

__Ответ:__ $\left[\dfrac{8}{3};\ 8\right)$.

C2 Найдите количество решений системы

$$\begin{cases} \sqrt[4]{4y-\pi} = \dfrac{\cos^2 2x - \cos^4 2x + \sin^4 2x}{2(\cos 2x - 1)}, \\ \log_{0{,}36} \sqrt[5]{x+2y} \geq \dfrac{1}{5}\log_{0{,}36}(4\pi) \end{cases}$$

Решение:

1) $$\frac{\cos^2 2x - \cos^4 2x + \sin^4 2x}{2(\cos 2x - 1)} = \frac{\cos^2 2x - \left(\cos^4 2x - \sin^4 2x\right)}{2(\cos 2x - 1)} =$$

$$= \frac{\cos^2 2x - \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)\left(\cos^2 2x + \sin^2 2x\right)}{2(\cos 2x - 1)} =$$

$$= \frac{\sin^2 2x}{-4\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{-4\sin^2 x} = -\cos^2 x \leq 0.$$

Так как при этом левая часть уравнения неотрицательна, то уравнение имеет решение только при условии, что выражения в обеих его частях равны нулю:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 0, \\ \sqrt[4]{4y-\pi} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

2) Умножая обе части неравенства на 5 и пользуясь свойством убывания функции $y = \log_{0{,}36} t$, заменим неравенство исходной системы на равносильное: $0 < x + 2y \leq 4\pi$.

Так как $x + 2y = \pi + \pi n,\ n \in Z$, найдем значения n из неравенства $0 < \pi + \pi n \leq 4\pi,\ n \in Z$,

$0 < 1 + n \leq 4,\ n \in Z$,

$-1 < n \leq 3,\ n \in Z$.

Поэтому $n = 0$, или $n = 1$, или $n = 2$ или $n = 3$. Следовательно, система имеет 4 решения.

Ответ: 4.

0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С3 Найдите все значения $x > 7$, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $a = 15 - \log_2(x-6) - 7\log_{x-6} 8$ и $b = \log_2^2(x-6)^5 - 395$ меньше 5.

<u>Решение:</u>

1) Наименьшее из двух чисел меньше 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них меньше 5. Поэтому необходимо решить следующую совокупность: $\left[\begin{array}{l} a < 5, \\ b < 5. \end{array}\right.$

2) $a < 5 \Leftrightarrow 15 - \log_2(x-6) - 7\log_{x-6} 8 < 5 \Leftrightarrow \log_2(x-6) + 21\log_{x-6} 2 - 10 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-6) + \frac{21}{\log_2(x-6)} - 10 > 0.$$

Пусть $t = \log_2(x-6)$. Из условия $x > 7$ следует, что $t > 0$. Тогда $t^2 - 10t + 21 > 0$, то есть $0 < t < 3$ или $t > 7$.

$b < 5 \Leftrightarrow \log_2^2(x-6)^5 - 395 < 5 \Leftrightarrow \log_2^2(x-6)^5 < 400 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -20 < \log_2(x-6)^5 < 20 \Leftrightarrow -20 < 5\log_2(x-6) < 20 \Leftrightarrow -4 < \log_2(x-6) < 4.$

Тогда $0 < t < 4$.

Получаем совокупность $\left[\begin{array}{l} 0 < t < 3, \\ t > 7, \\ 0 < t < 4, \end{array}\right.$ откуда $0 < t < 4$ или $t > 7$.

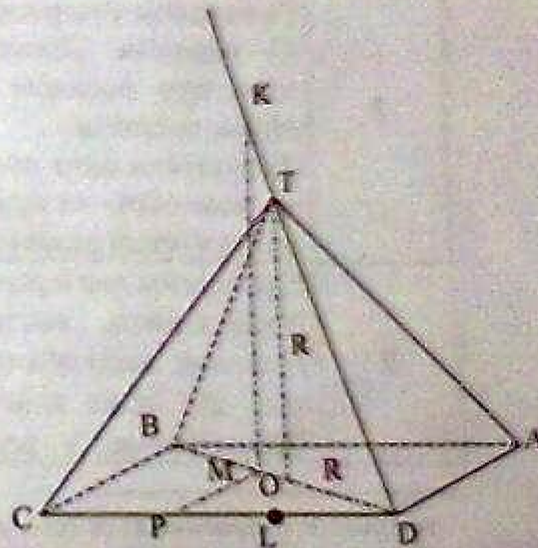
3) Из неравенства $0 < \log_2(x-6) < 4$ получаем: $7 < x < 22$. Из неравенства $\log_2(x-6) > 7$ получаем $x > 134$.

<u>Ответ:</u> $(7;\ 22) \cup (134;\ +\infty)$.

равноудалена от точек L и C. Найдите объем пирамиды $KABLD$.

Решение:

1) Пусть O – центр сферы радиуса R, описанной около пирамиды $TABCD$. Так как $OA = OB = OC = OD = OT = R$, а $O \in ABC$, то точка O – является также центром окружности радиуса R, описанной около квадрата $ABCD$, то есть точкой пересечения его диагоналей. Тогда $AB = R\sqrt{2}$.



2) $TABCD$ – правильная пирамида, поэтому TO – высота пирамиды и $BTO \perp ABC$. По условию $K \in DT$ и $KL = KC$. Опустим из точки K перпендикуляр KM на прямую BO. Так как $BTO \perp ABC$, то $KM \perp ABC$, и следовательно, KM – высота пирамиды $KABLD$, а отрезки ML и MC – проекции равных наклонных KL и KC. Значит, $ML = MC$, и поэтому треугольник MLC –

равнобедренный с основанием LC, а его высота MP является медианой, то есть $PL=PC$.

3) Объем V пирамиды $KABLD$, равный $\frac{1}{3}S_{ABLD}\cdot KM$, выразим через R. Из условия $\frac{DL}{LC}=\frac{3}{5}$, имеем $DL=\frac{3}{8}AB$ и $S_{ABLD}=\frac{AB+DL}{2}\cdot AD=\frac{11R^2}{8}$. В треугольнике TOD $OT=OD$, поэтому $\angle TDO=45°$. Отсюда в треугольнике KMD $KM=MD$. Из подобия треугольников DMP и DBC получаем: $\frac{DM}{DB}=\frac{DP}{DC}=\frac{11}{16}$, то есть $DM=\frac{11}{16}DB=\frac{11R}{8}$. Отсюда

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{11R^2}{8}\cdot\frac{11R}{8}=\frac{121\cdot 12\cdot 12\cdot 12}{3\cdot 8\cdot 8}=1089.$$

Ответ: 1089.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) установлено, что центром сферы, описанной около пирамиды $TABCD$, является точка пересечения диагоналей квадрата A

C5 Решите уравнение $f(f(x)) = f\left(x^2 + 6x + 12\right)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 12 - 3t + 4|t - 3|, & t > 0, \\ 15t^3 - 4t^2 + 7t, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

<u>**Решение:**</u>

1) При $x \geqslant 3$ имеем $f(x) = 12 - 3x + 4(x - 3) = x \geqslant 3$, поэтому $f(f(x)) = f(x) = x$, а $f\left(x^2 + 6x + 12\right) = x^2 + 6x + 12$ (при всех x) и уравнение принимает вид $x = x^2 + 6x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 12 = 0$. Таким образом, исходное уравнение при $x \geqslant 3$ корней не имеет.

2) При $0 < x < 3$ имеем $f(x) = 12 - 3x + 4(-x + 3) = 24 - 7x > 3$, $f(f(x)) = f(x) = 24 - 7x$, поэтому уравнение принимает вид

$$24 - 7x = x^2 + 6x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 13x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{217}}{2}.$$

Условию $0 < x < 3$ удовлетворяет только один корень $x = \dfrac{\sqrt{217} - 13}{2}$.

3) При $x \leqslant 0$ уравнение не имеет корней, так как функция f возрастает (как сумма возрастающих функций) и

$$f(x) \leqslant f(0) = 0 \Rightarrow f(f(x)) \leqslant f(0) = 0 < f\left(x^2 + 6x + 12\right).$$

<u>**Ответ:**</u> $\dfrac{\sqrt{217} - 13}{2}$.