

# Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Финальный тренировочный вариант №105/505

«ШТУРМ МОЗГА»

(совместный проект [egemathschool.ru](http://egemathschool.ru) и [alexlarin.net](http://alexlarin.net))

Профильный уровень  
Инструкция по выполнению работы



Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ    Ответ: -0,8    10 - 0 , 8    Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

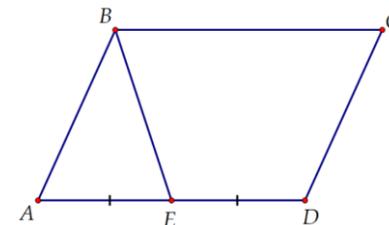
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

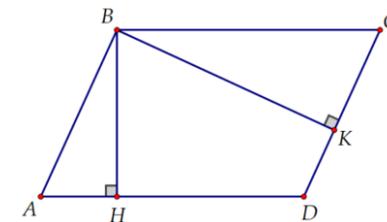
**1.**

**1.1** Площадь параллелограмма ABCD равна 120. Точка E – середина стороны AD. Найдите площадь треугольника ABE.



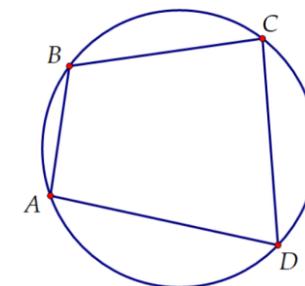
Ответ: \_\_\_\_\_.

**1.2** Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите длину высоты, опущенной на большую сторону параллелограмма.



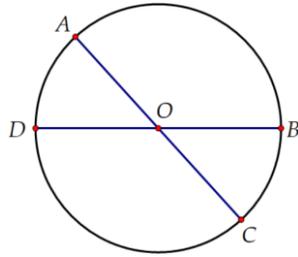
Ответ: \_\_\_\_\_.

**1.3** Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны  $99^\circ$  и  $117^\circ$ . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



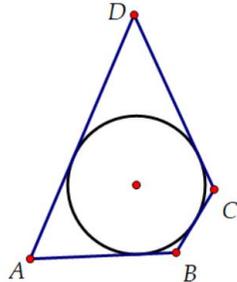
Ответ: \_\_\_\_\_.

**1.4** Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен  $16^\circ$ . Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



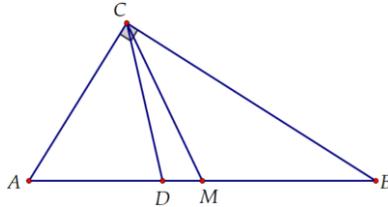
Ответ: \_\_\_\_\_.

**1.5** В четырехугольник ABCD вписана окружность,  $AB = 10$ ,  $CD = 17$ . Найдите периметр четырехугольника ABCD.



Ответ: \_\_\_\_\_.

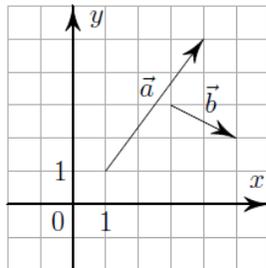
**1.6** Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен  $21^\circ$ . Найдите величину угла между биссектрисой CD и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.**

**2.1** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

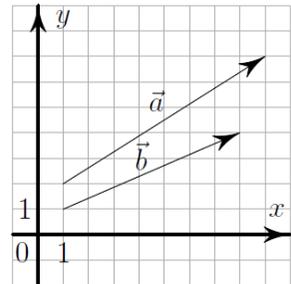
**2.2** Длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны 4 и 19, а угол между ними равен  $60^\circ$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.3** Даны векторы  $\vec{a}(-16;10)$  и  $\vec{b}(0;8,2)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.4** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.5** Даны векторы  $\vec{a}(-3;8)$ ,  $\vec{b}(14;-5)$  и  $\vec{c}(-2;6)$ . Найдите значение выражения  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

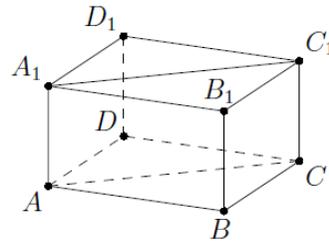
Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.6** Длина вектора  $\vec{a}$  равна  $12\sqrt{3}$ , угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $30^\circ$ , а скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  равно 54. Найдите длину вектора  $\vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

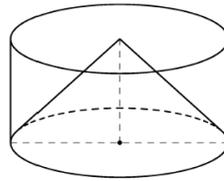
3.

**3.1** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известно, что  $AB=8$ ,  $BC=7$ ,  $AA_1=6$ . Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ .



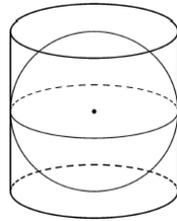
Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.2** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна  $5\sqrt{2}$ . Найдите площадь боковой поверхности конуса.



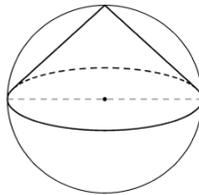
Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.3** Шар, объём которого равен 24, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.



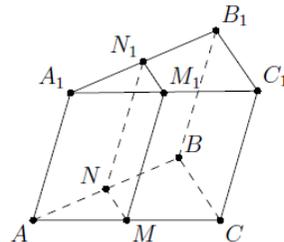
Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.4** Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 60. Найдите объём конуса.



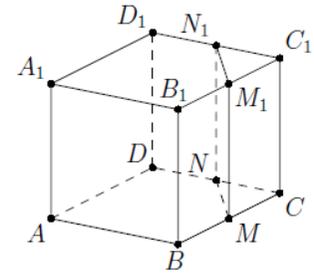
Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.5** Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 36. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.6** Объём куба равен 160. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



Ответ: \_\_\_\_\_.

4.

**4.1** В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.2** В сборнике билетов по математике всего 48 билетов, в двенадцати из них встречается вопрос по теме “Логарифмы”. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме “Логарифмы”.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.3** В группе туристов 300 человек. Их вертолёт доставляет в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолёта.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.4** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем  $36,8^{\circ}\text{C}$ , равна 0,91. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется  $36,8^{\circ}\text{C}$  или выше.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.5** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 23 пассажиров, равна 0,87. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,61. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 22 включительно.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.6** На конференцию приехали учёные из трёх стран: 7 из Сербии, 3 из России и 2 из Дании. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из России.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.**

**5.1** При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.2** Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,2. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.3** Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.4** Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.5** Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события “сумма очков равна 9”.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.6** В коробке 12 синих, 6 красных и 7 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.**

**6.1** Найдите корень уравнения  $(x + 4)^3 = -125$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.2** Найдите корень уравнения  $\sqrt{57 - 7x} = 6$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.3** Решите уравнение  $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} = 6^x$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.4** Решите уравнение  $9^{-2-x} = 27$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.5** Решите уравнение  $\log_2(x-2) = \log_2 11$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.6** Решите уравнение  $\log_4(x-2025) = 2$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.**

**7.1** Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.2** Найдите значение выражения  $48 \log_7 \sqrt[4]{7}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.3** Найдите значение выражения  $3 \cos 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = -0,8$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.4** Найдите значение выражения  $4\sqrt{3} \cos^2 \frac{23\pi}{12} - 4\sqrt{3} \sin^2 \frac{23\pi}{12}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.5** Найдите значение выражения  $\frac{3 \sin 68^\circ}{\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ}$ .

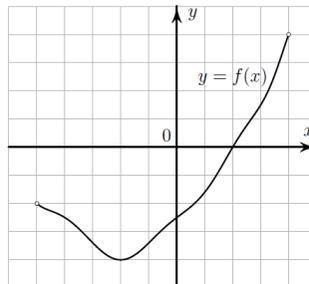
Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.6** Найдите значение выражения  $6\sqrt{3} \cos^2 \frac{11\pi}{12} - 3\sqrt{3}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

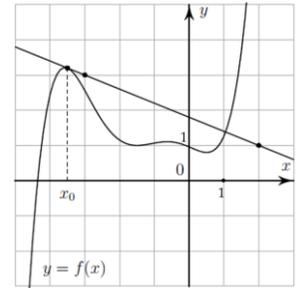
**8.**

**8.1** На рисунке изображен график  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;4)$ . Найдите корень уравнения  $f'(x) = 0$ .



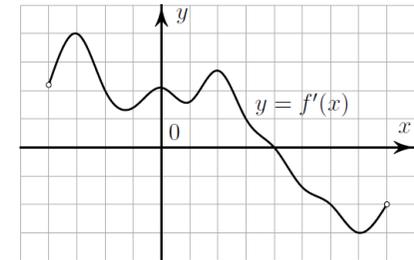
Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.2** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



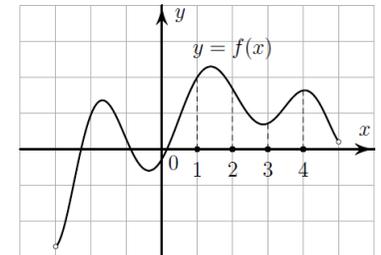
Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.3** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4;8)$ . Найдите точку экстремума функции  $f(x)$ , принадлежащую отрезку  $[1;6]$ .



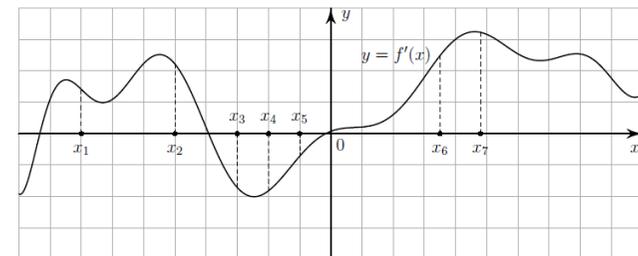
Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.4** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки: 1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной функции  $f(x)$  наименьшее? В ответе укажите эту точку.



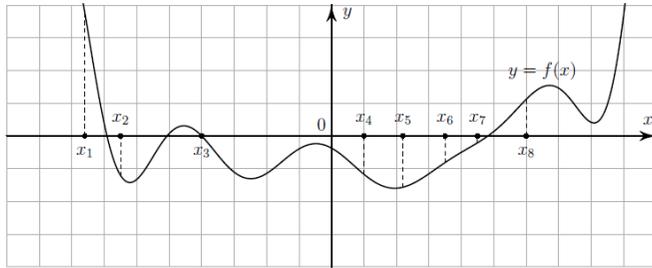
Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.5** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечено семь точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ . Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции  $f(x)$ ?



Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.6** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечено восемь точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ . Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции  $f(x)$  положительна.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.**

**9.1** Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 36$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 см до 50 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана – в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.2** При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон  $pV^k = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$ , где  $p$  – давление в газе (в Па),  $V$  – объём газа (в  $\text{м}^3$ ),  $k = \frac{4}{3}$ . Найдите, какой объём  $V$  (в  $\text{м}^3$ ) будет занимать газ при давлении  $p$ , равном  $2 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.3** Два тела, массой  $m = 9$  кг каждое, движутся с одинаковой скоростью  $v = 6$  м/с под углом  $2\alpha$  друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле  $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$ , где  $m$  – масса (в кг),  $v$  – скорость (в м/с). Найдите, под каким углом  $2\alpha$  должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 81 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.4** В ходе распада радиоактивного изотопа его масса  $m$  (в мг) уменьшается по закону  $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ , где  $m_0$  – начальная масса изотопа (в мг),  $t$  – время, прошедшее от начального момента, в минутах,  $T$  – период полураспада в минутах. В начальный момент времени масса изотопа равна 100 мг. Период его полураспада составляет 2 минуты. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 12,5 мг.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.5** Водолазный колокол, содержащий  $\nu = 6$  моль воздуха при давлении  $p_1 = 2,5$  атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления  $p_2$  (в атмосферах). Работа  $A$  (в Дж), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле  $A = \alpha \cdot \nu \cdot T \cdot \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ , где  $\alpha = 5,75 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – постоянная,  $T = 300 \text{ К}$  – температура воздуха. Найдите давление  $p_2$  воздуха в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа 10350 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.6** Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону  $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$ , где  $h$  – высота в метрах,  $t$  – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

Ответ: \_\_\_\_\_.

10.

**10.1** Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй – 25% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.2** Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие 3 часа — со скоростью 45 км/ч, а затем 2 часа — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.3** Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 104 литров она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.4** По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 85 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 250 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского, равно 30 секундам. Ответ дайте в метрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.5** Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит некоторое расстояние по реке и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 53 часа после отправления из него. Сколько километров проходит теплоход за весь рейс?

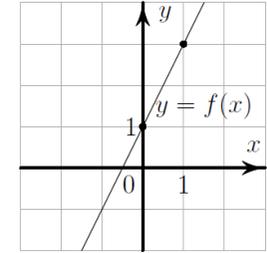
Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.6** Моторная лодка прошла против течения реки 48 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 8 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 8 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

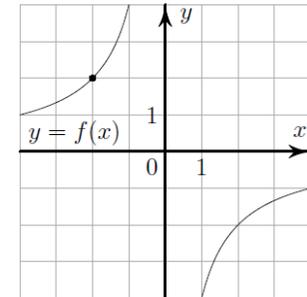
11.

**11.1** На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = kx + b$ . Найдите значение  $f(4)$ .



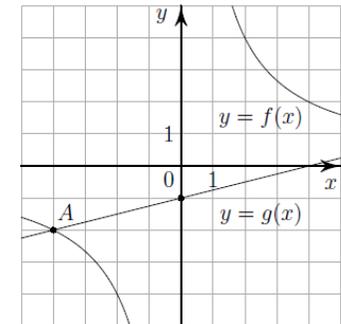
Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.2** На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \frac{k}{x}$ . Найдите значение  $f(10)$ .



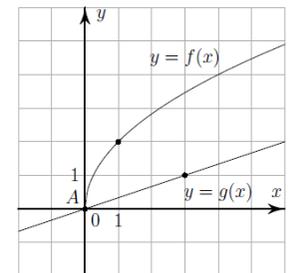
Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.3** На рисунке изображены графики функций  $g(x) = ax + b$  и  $f(x) = \frac{k}{x}$ , пересекающиеся в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.



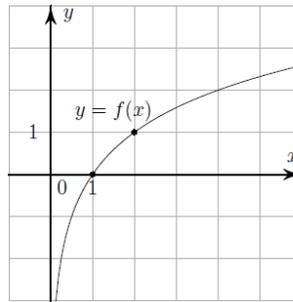
Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.4** На рисунке изображены графики функций видов  $f(x) = a\sqrt{x}$  и  $g(x) = kx$ , пересекающиеся в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.



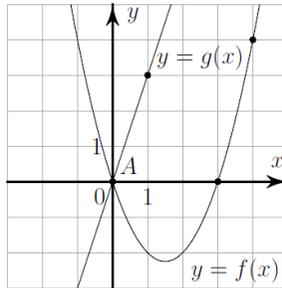
Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.5** На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \log_a x$ . Найдите значение  $f(8)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.6** На рисунке изображён графики функций видов  $f(x) = ax^2 + bx + c$  и  $g(x) = kx$ , пересекающиеся в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.**

**12.1** Найдите точку максимума функции  $y = x^3 - 27x + 14$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.2** Найдите наибольшее значение функции  $y = 11 + 6x - 4x\sqrt{x}$  на отрезке  $[0; 21]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.3** Найдите точку максимума функции  $y = x^2 - 33x + 136 \cdot \ln x + 74$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.4** Найдите точку минимума функции  $y = 5x - \ln(x + 3)^5 + 6$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

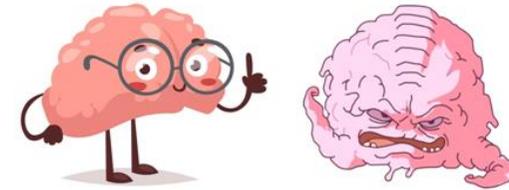
**12.5** Найдите точку минимума функции  $y = (7 - x) \cdot e^{7-x}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.6** Найдите наибольшее значение функции  $y = 10 \sin x - \frac{42x}{\pi} - 12$  на отрезке  $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания*



**Часть 2**

*Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

**13.**

**13.1** А) Решите уравнение  $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{6} - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ .

**13.2** А) Решите уравнение  $\sqrt{3} \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{3} \cos^2 x$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**13.3** А) Решите уравнение  $\sin^2\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{23\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{19\pi}{2} - x\right)$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**13.4** А) Решите уравнение  $2 \sin 2x \cdot (2 + \sin x) = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**13.5** А) Решите уравнение

$$\cos\left(\pi - \frac{5x}{2}\right) \cos\left(\pi + \frac{3x}{2}\right) = 2 \cos^2 x - \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**13.6** А) Решите уравнение  $27^{\operatorname{tg}^2 x} + 81 \cdot 27^{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = 30$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

## 14.

**14.1** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 8, а боковое ребро  $SA$  равно 5. На ребрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $L$  и  $N$  соответственно, причем что  $AL : LB = SN : NC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $LN$  и параллельна прямой  $BC$ .

А) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .

Б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

**14.2** Основание пирамиды  $SABC$  – прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Ребро  $SA$  является высотой пирамиды. Точки  $E$  и  $F$  лежат на ребрах  $AC$  и  $BS$  соответственно так, что  $SF : FB = AE : EC = 1 : 5$ .

А) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $E$  и  $F$  перпендикулярно прямой  $AC$ , является прямоугольником.

Б) Точки  $H$  и  $M$  – точки пересечения плоскости  $\alpha$  с прямыми  $AB$  и  $CS$ . Найдите объем многогранника  $BCMEHF$ , если объем пирамиды  $SABC$  равен 216.

**14.3** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 15, а боковое ребро  $SA$  равно 23. На ребрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причем  $AM = SK = 7$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .

А) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .

Б) Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .

**14.4** Диагонали  $BE$  и  $DF$  основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  пересекаются в точке  $P$ , а диагонали  $FE_1$  и  $EF_1$  боковой грани  $EFF_1 E_1$  пересекаются в точке  $Q$ .

А) Докажите, что прямая  $QP$  параллельна плоскости  $CB_1 E_1$ .

Б) Найдите расстояние между прямой  $QP$  и плоскостью  $CB_1 E_1$ , если сторона основания призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  равна  $2\sqrt{3}$ , а ее высота равна 4.

**14.5** Точка  $M$  – середина бокового ребра  $SC$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , точка  $N$  лежит на стороне основания  $BC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно боковому ребру  $SA$ .

А) Плоскость  $\alpha$  пересекает ребро  $SD$  в точке  $L$ . Докажите, что  $BN : NC = DL : LS$ .

Б) Пусть  $BN : NC = 1 : 2$ . Найдите отношение многогранников, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает пирамиду.

**14.6** Дан тетраэдр  $ABCD$ . На ребре  $AC$  выбрана точка  $K$  так, что  $AK : KC = 3 : 7$ . На ребрах  $AD$ ,  $DB$  и  $BC$  выбраны точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $KL MN$  – квадрат со стороной 3.

А) Докажите, что ребра  $AB$  и  $CD$  взаимно перпендикулярны.

Б) Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $KL MN$ , если объем тетраэдра равен 100.

**15.** Решите неравенство:

**15.1**  $x \log_3 \left( \frac{x}{3} + 2 \right) \geq 8 \log_{\frac{1}{9}} \left( \frac{x}{3} + 2 \right)$

**15.2**  $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

**15.3**  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$

**15.4**  $\frac{\lg(x^2) - 2}{4 - 3\lg(x^4)} \geq -\frac{1}{2}$

**15.5**  $\log_{0,25}^2(x+3)^2 - 16 \log_4|x+3| + 12 > 0$

**15.6**  $\frac{20^x - 16 \cdot 5^x}{4^x \cdot x - 16x - 3 \cdot 4^x + 48} \leq \frac{3}{x-3}$

**16.**

**16.1** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на срок 10 лет.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку  $r$ , если известно, что последний платёж будет не менее 0,92 млн рублей.

**16.2** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

| Месяц и год          | Июль 2025 | Июль 2026 | Июль 2027 | Июль 2028 |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг ( в млн рублей) | $S$       | $0,8S$    | $0,5S$    | $0$       |

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

**16.3** 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите  $r$ , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1021 тысячу рублей.

**16.4** В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 500 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2080 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2026 году?

**16.5** В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 48 250 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**16.6** В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году составит 833,8 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

## 17.

**17.1** Диагонали равнобедренной трапеции ABCD с основаниями AD и BC перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

- А) Докажите, что точка P лежит на диагонали BD трапеции ABCD.  
 Б) Найдите расстояние от точки P до боковой стороны AB, если  $BC = 3$ ,  $AD = 21$ .

**17.2** Четырёхугольник ABCD вписан в окружность, причем диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в ABCD можно вписать окружность.

- А) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.  
 Б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника ABCD, если  $AC = 34$  и  $BD = 30$ .

**17.3** Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

- А) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.  
 Б) Найдите BC, если радиусы окружностей равны  $\sqrt{7}$  и 3.

**17.4** В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, CD – диаметр этой окружности.

- А) Докажите, что  $\angle MDN = \angle CAB + \angle ABC$ .  
 Б) Найдите длину отрезка MN, если  $AB = 16\sqrt{2}$ ,  $CM : MA = 5 : 19$  и  $CN : NB = 5 : 7$ .

**17.5** В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

- А) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.  
 Б) Пусть P – точка пересечения биссектрис этого треугольника. Найдите площадь четырёхугольника AMPN, если  $MN : BC = 2 : 3$ ,  $BN = 10$ .

**17.6** Окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Касательная к окружности пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно.

- А) Докажите, что сумма углов AOD и BOE равна  $180^\circ$ .  
 Б) Найдите DE, если  $AC = BC$ , радиус окружности равен 3,  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$ ,  
 а разность углов AOD и BOE равна  $60^\circ$ .

18.

**18.1** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{3|x+a| - a + x - 10}{\sqrt{x^2 - 18x - 88}} = 0$$

имеет ровно два корня.

**18.2** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\log_a(\sin x + 2) + \log_a(\sin x + 3) = 1$$

имеет хотя бы одно решение.

**18.3** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$|x^2 - 6x + 8| - a + |x^2 - 6x + 5| = 0$$

имеет более трех корней.

**18.4** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$$

имеет два положительных корня.

**18.5** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 2, \\ 2|x+1| + ay = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**18.6** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} \log_{x-2}(2x^2 - 4x + y + 1) = 2, \\ x + y - 3 = a - a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

19.

**19.1** На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 7.

А) Может ли сумма этих чисел быть равна 231?

Б) Может ли сумма этих чисел быть равна 1590?

В) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1056?

**19.2** Ежедневно в зоопарке каждой лисе полагается 2 кг мяса, тигру – 14 кг, льву – 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждой лисы – 20, у каждого тигра – 160 и все эти звери есть в зоопарке.

А) Какое число посетителей будет у этих животных, если ежедневно в зоопарке распределяют 70 кг мяса?

Б) Может ли ежедневно распределяться 420 кг мяса, если известно, что посетителей за 1 день было меньше 4000?

В) Каким может быть наибольшее ежедневное число посетителей у этих зверей, если зоопарк ежедневно распределяет между ними 111 кг мяса?

**19.3** Четырехзначное натуральное число разделили на сумму его цифр. Известно, что в результате получилось натуральное число, которое не кратно 100.

А) Могло ли получиться число 820?

Б) Могло ли получиться число 821?

В) Какое наибольшее число могло получиться?

**19.4** Отношение трехзначного числа к удвоенной сумме его цифр является целым числом.

А) Может ли это отношение равняться 25?

Б) Может ли это отношение равняться 44?

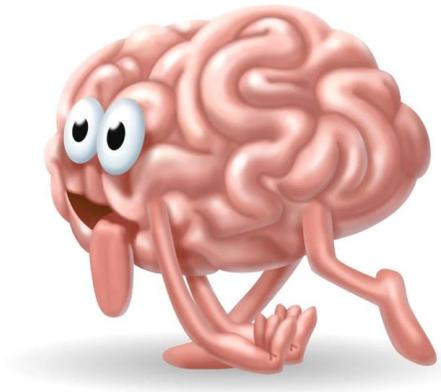
В) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трехзначного числа равна 8?

**19.5** Карина выписывает в тетрадь 200 таких различных натуральных чисел, что их сумма равна 20264.

- А) Может ли среди них быть число 310?
- Б) Может ли среди выписанных чисел не быть числа 17?
- В) Какое наименьшее количество чисел, кратных 17, могло быть выписано?

**19.6** Есть желтые и белые карточки, всего – 100 штук. На каждой написано натуральное число, среднее арифметическое всех чисел равно 32. Все числа на желтых карточках разные. При этом любое число на желтой карточке больше, чем любое число на белой. Все числа на желтых карточках увеличили в 3 раза, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 94,6.

- А) Может ли быть ровно 70 желтых карточек?
- Б) Могут ли все числа на белых карточках быть различными?
- В) Какое наибольшее количество желтых карточек может быть?



*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*